§2.3 Jeder K-Vektorraum hat eine Basis.

$$\forall V : (V \text{ ist Vektorraum}) \Longrightarrow \exists B \left(\begin{array}{l} B \text{ ist Teilmenge von } V : \\ \forall v \in V : \exists!\, a : B \to K,\ b \mapsto a_b, \\ \text{so dass } v = \sum_{b \in B} a_b \cdot b \end{array} \right)$$

Je zwei Basen von V haben dieselbe Kardinalität.

$$\forall B\ \forall B' : \left(\begin{array}{l} B \text{ ist Teilmenge von } V \\ \forall v \in V\ \exists!\, a : B \to K : \\ v = \sum_{b \in B} a_b\, b \end{array} \right) \wedge \left(\begin{array}{l} B' \subset V \text{ und} \\ \forall v \in V\ \exists!\, a' : B' \to K : \\ v = \sum_{b \in B'} a'_b\, b \end{array} \right)$$

$$\Longrightarrow \exists \text{ bijektive Abb. } B \to B'.$$

---

§2.7-8: Körper: $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{F}_p$, $\mathbb{Q}(i)$

Ringe: $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, $\mathrm{Mat}_{n\times n}(K)$, $\mathrm{End}_K(V)$, $K^{n\times n}$

$K^{n\times m} = \mathrm{Mat}_{n\times m}(K)$

I Intervall: $C(I,\mathbb{R})$, $C^\infty(I,\mathbb{R})$,

Gruppen: $(V,+)$, $(R,+)$ für Ring, $(R^\times, \cdot)$, $\mathrm{End}_K(V)^\times = \mathrm{Aut}_K(V)$, $\mathrm{Mat}_{n\times n}(K)^\times = GL_n(K)$,

$C(I,\mathbb{R})^\times = C(I, \mathbb{R}\setminus\{0\})$, $C^\infty(I,\mathbb{R})^\times = C^\infty(I, \mathbb{R}\setminus\{0\})$

Ad 3.2: A $\ell \times m$-Matrix, B $m \times n$-Matrix

$$\begin{tikzcd} K^n \arrow[r, "L_B"', "v \mapsto Bv"] \arrow[rr, bend right, "L_A \circ L_B"'] & K^m \arrow[r, "L_A", "w \mapsto Aw"'] & K^\ell \end{tikzcd}$$

$$v \longmapsto A(Bv) = (AB)v$$

$$\begin{array}{ccccc} U & \xrightarrow{g} & V & \xrightarrow{f} & W \\ B & & B' & & B'' \end{array}$$

$${}_{B''}[f \circ g]_B = {}_{B''}[f]_{B'} \cdot {}_{B'}[g]_B.$$

§4.1:

$$K^n = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} : \text{alle } x_i \in K \right\}. \qquad \{1,\dots,n\} \to K, \; i \mapsto x_i.$$

$$K^I = \{ \text{Abb. } I \to K \} \qquad I \text{ beliebige Menge.}$$

$$= \{ (x_i)_{i \in I} \mid \text{alle } x_i \in K \}.$$

$$K^{(I)} := \{ (x_i)_{i\in I} \in K^I \mid \exists\, I' \subset I \text{ endlich}: \forall i \in I \setminus I' : x_i = 0 \}.$$

X beliebige Menge, $\mathrm{Pow}(X)$ als $\mathbb{F}_2$-Vektorraum.

<u>Neue Vektorräume:</u> $U', U \subset V$ Unterraum.

$U + U'$, $U \cap U'$

V/U

$S \subset V$ Teilmenge $\langle S \rangle \subset V$ Erzeugnis von S.

S ist Erzeugendensystem von $\langle S \rangle = \mathrm{span}(S)$.

Komplement,

$f : V \to W$ $\quad \mathrm{Ker}(f)$, $\mathrm{Bild}(f)$

$\mathrm{Hom}_K(V, W)$, $\quad V^\vee$ Dualraum.

$$\prod_{i=1}^{\infty} V_i = \{ (v_i)_{i=1}^{\infty} \mid \text{jedes } v_i \in V_i \}$$

$$\bigoplus_{i=1}^{\infty} V_i = \{ \quad \text{"} \quad \mid \quad \text{"} \quad \text{und } \underbrace{\text{fast alle } v_i = 0}_{\Updownarrow} \}$$

$$\exists\, I' \subset \mathbb{Z}^{\geq 1} \text{ endlich} : \forall\, i \notin I' : v_i = 0.$$

I beliebige Menge

$A(i)$ Aussage über $i \in I$.

„Für <u>fast alle</u> $i \in I$ gilt $A(i)$" $:\Longleftrightarrow$ „$\exists\, I' \subset I$ endlich : $\forall\, i \in I \setminus I' : A(i)$"